$\boxed{\text{Aula 4}}$ Série de Taylor

Ex. 1) $f(x) = e^x$

1º Passo: Calcular a expressão genérica de $f^{(n)}(x)$

$$f(x) = e^x;\ f'(x) = e^x;\ \dots \longrightarrow f^{(n)}(x) = e^x$$

2º Passo: Escrever a série pedida: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

C. aux.

$c = 0 \longrightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ A série fica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

A série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Será que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$?

Ex 2) Mostrar que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1º Passo: Verificar que a série de Maclaurin de e^x é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (feito no Ex. 1)

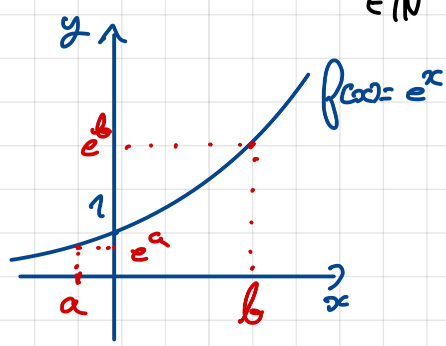
2º Passo: Aplicar um dos teoremas anteriores (começar no slide (7))

$\rightarrow$ Determinar M (caso exista) tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Seja $I = [a, b]$ com $0 \in I$

Temos que $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^b$ $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow M$



3º Passo: Conclusão

Como I pode ser qualquer intervalo, então $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ex. 3) Série de MacLaurin das funções

a) $f(x) = \cos x$

1º Passo: $f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f''(x) = -\cos x$
$f'''(x) = \operatorname{sin} x$
$f^{(4)}(x) = \cos x$

Então

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\operatorname{sen} x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \operatorname{sen} x, & n = 4k+3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \rightsquigarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ 0, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ 0, & n = 4k+3 \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N}_0^+)$

2º Passo: A série de MacLaurin de f é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$$

Provar usando o teorema do slide 17

Basta verificar que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0$ ↳ M

Nota: Sucessão números pares: $u_n = 2n, n \in \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow 0, 2, 4, 6, 8 \dots$

Sucessão números ímpares: $u_n = 2n+1, n \in \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow 1, 3, 5, 7 \dots$

ou

$u_n = 2n-1, n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow 1, 3, 5, 7 \dots$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x \rightsquigarrow$ T.P.C. (ver formulário)

Nas alíneas seguintes aproveitar sempre que possível as séries do formulário:

Por exemplo: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, -1 < x < 1$ $\xrightarrow{\text{generalizando}}$ $\frac{1}{1-\blacktriangle} = \sum_{n=0}^{+\infty} \blacktriangle^n, -1 < \blacktriangle < 1$

c) $f(x) = \frac{1}{1+8x}$

$$\frac{1}{1+8x} = \frac{1}{1-(-8x)} \overset{\text{Formulário}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-8x)^n, -1 < -8x < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-8)^n x^n, \underbrace{-\frac{1}{8} < x < \frac{1}{8}}$$

↳ Intervalo de Convergência

d) $f(x) = x e^{-2x}$

Pelo formulário: $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

Logo $e^{-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Então $x e^{-2x} = x \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{R}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^{n+1}}{n!}, \forall n \in \mathbb{R}$$

e) T.P.C. Solução: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} x^n$

f) $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{4}{4(1-\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} \overset{\text{Formulário}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n, -1 < \frac{x^2}{4} < 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}, \underbrace{-4 < x^2 < 4}$$

$$\underbrace{x^2 > -4}_{\text{Cond. univ.}} \wedge \underbrace{x^2 < 4}$$

I.C. $-2 < x < 2$

g) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$

C. Aux $\quad e^{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

Então

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}\right)$$

Nota: $1-(-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ 2, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \cancel{2} \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

h) $f(x) = \cosh x \rightarrow$ T.P.C.

4) $f(x) = \frac{1}{4-3x} \rightarrow$ Série de potências de $x-2$

$$\frac{1}{11-3x} = \frac{1}{11-3(x-2+2)} = \frac{1}{11-3(x-2)-6} = \frac{1}{5-3(x-2)} = \frac{1}{5\left(1-\frac{3}{5}(x-2)\right)}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{1-\frac{3}{5}(x-2)}$$

$$= \frac{1}{5} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}(x-2)\right)^n, \quad -1 < \frac{3}{5}(x-2) < 1$$

$$= \frac{1}{5} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n}(x-2)^n, \quad -5 < 3(x-2) < 5$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}(x-2)^n, \quad -\frac{5}{3} < x-2 < \frac{5}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{5}{3}+2 < x < \frac{5}{3}+2$$

$$\boxed{\frac{1}{3} < x < \frac{11}{3}} \quad \text{I.C.}$$

5)

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!} \overset{\text{formulário}}{=} e^5$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!} \overset{\text{formulário}}{=} \cos(2\pi) = 1$